Отчёт за 2019 год по конкурсу «Молодая математика России»

Герман О. Н.

Полученные в 2019 году результаты

В этом году удалось получить ряд результатов в теории диофантовых приближений с весами.

Теоремы переноса для диофантовых приближений с весами. Пусть задана матрица

$$\Theta = \begin{pmatrix} \theta_{11} & \cdots & \theta_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \theta_{n1} & \cdots & \theta_{nm} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times m}, \quad n+m=d,$$

и вещественное число γ. В теории диофантовых приближений один из наиболее классических вопросов заключается в том, имеет ли система неравенств

$$\begin{cases} |\mathbf{x}|^m \leqslant t \\ |\Theta\mathbf{x}-\mathbf{y}|^n \leqslant t^{-\gamma} \end{cases} \tag{1}$$

ненулевое решение $(\mathbf{x},\mathbf{y}) \in \mathbb{Z}^m \oplus \mathbb{Z}^n$ при больших t. Здесь $|\cdot|$ обозначает sup-норму. В мультипликативной теории диофантовых приближений sup-норма заменяется на среднее геометрическое. Диофантовы приближения с весами — в некотором смысле промежуточный шаг между этими двумя постановками. Для заданных весов $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1,\ldots,\sigma_m) \in \mathbb{R}^m$, $\boldsymbol{\rho} = (\rho_1,\ldots,\rho_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\sigma_1 \geqslant \ldots \geqslant \sigma_m > 0, \qquad \rho_1 \geqslant \ldots \geqslant \rho_n > 0, \qquad \sum_{j=1}^m \sigma_j = \sum_{i=1}^n \rho_i = 1,$$

рассматриваются взвешенные нормы $|\cdot|_{\boldsymbol{\sigma}}$ и $|\cdot|_{\boldsymbol{\rho}}$,

$$|\mathbf{x}|_{\boldsymbol{\sigma}} = \max_{1\leqslant j\leqslant m} |x_j|^{1/\sigma_j} \qquad \text{для } \mathbf{x} = (x_1,\ldots,x_m),$$

$$|\mathbf{y}|_{\boldsymbol{\rho}} = \max_{1\leqslant i\leqslant n} |y_i|^{1/\rho_i} \qquad \text{для } \mathbf{y} = (y_1,\ldots,y_n).$$

Соответственно, вместо системы (1) рассматривается система

$$\begin{cases} |\mathbf{x}|_{\boldsymbol{\sigma}} \leqslant t \\ |\Theta\mathbf{x}-\mathbf{y}|_{\boldsymbol{\rho}} \leqslant t^{-\gamma} \end{cases} . \tag{2}$$

Ясно, что при σ_j равных to $1/m$ и ρ_i равных $1/n$ система (2) превращается в (1).

Определение 1. *Взвешенная диофантова экспонента* $\omega_{\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\rho}}(\Theta)$ определяется как точная верхняя грань таких γ, что система (2) имеет ненулевое решение $(\mathbf{x},\mathbf{y}) \in \mathbb{Z}^{m+n}$ для сколь угодно больших значений t.

Определение 2. *Равномерная взвешенная диофантова экспонента* $\hat{\omega}_{\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\rho}}(\Theta)$ определяется как точная верхняя грань таких γ, что система (2) имеет ненулевое решение $(\mathbf{x},\mathbf{y}) \in \mathbb{Z}^{m+n}$ для всех достаточно больших t.

В этом году удалось доказать следующие две теоремы переноса.

Теорема 1. *Положим* $\omega = \omega_{\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\rho}}(\Theta)$ *и* $\omega^\intercal = \omega_{\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\sigma}}(\Theta^\intercal)$. *Тогда*

$$\omega^\intercal \geqslant \frac{\big(\rho_n^{-1} - 1\big) + \sigma_m^{-1}\omega}{\rho_n^{-1} + \big(\sigma_m^{-1} - 1\big)\omega}.$$

Теорема 2. *Положим* $\hat{\omega} = \hat{\omega}_{\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\rho}}(\Theta)$ *и* $\hat{\omega}^\intercal = \hat{\omega}_{\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\sigma}}(\Theta^\intercal)$. *Тогда*

$$\hat{\omega}^\intercal \geqslant \begin{cases} \dfrac{1 - \sigma_m\hat{\omega}^{-1}}{1 - \sigma_m} & \text{при } \hat{\omega} \geqslant \sigma_m/\rho_n \\ \dfrac{1 - \rho_n}{1 - \rho_n\hat{\omega}} & \text{при } \hat{\omega} \leqslant \sigma_m/\rho_n \end{cases}.$$

Теорема 1 обобщает на случай диофантовых приближений с весами классическую теорему переноса Дайсона. Теорема 2 обобщает на случай диофантовых приближений с весами теорему автора, полученную в 2012 году.

Отметим также, что теорема 1 усиливает совсем недавний результат Чоу–Гоша–Гуана–Марна–Симмонса.

Применение к неоднородным приближениям. Полученные результаты удалось также применить для неоднородных задач теории диофантовых приближений с весами.

Пусть $\boldsymbol{\eta} = (\eta_1, \ldots, \eta_n) \in \mathbb{R}^n$. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} |\mathbf{x}|_{\boldsymbol{\sigma}} \leqslant t \\ |\Theta\mathbf{x} - \mathbf{y} - \boldsymbol{\eta}|_{\boldsymbol{\rho}} \leqslant t^{-\gamma} \end{cases}. \tag{3}$$

Определение 3. *Неоднородная взвешенная диофантова экспонента* $\omega_{\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\rho}}(\Theta, \boldsymbol{\eta})$ определяется как точная верхняя грань таких γ, что система (3) имеет ненулевое решение $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{Z}^{m+n}$ для сколь угодно больших значений t.

Определение 4. *Неоднородная равномерная взвешенная диофантова экспонента* $\hat{\omega}_{\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\rho}}(\Theta, \boldsymbol{\eta})$ определяется как точная верхняя грань таких γ, что система (3) имеет ненулевое решение $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{Z}^{m+n}$ для всех достаточно больших t.

В этом году удалось доказать следующие две теоремы.

Теорема 3. *Положим* $\omega = \omega_{\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\rho}}(\Theta)$ *и* $\hat{\omega}_{\boldsymbol{\eta}} = \hat{\omega}_{\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\rho}}(\Theta, \boldsymbol{\eta})$. *Пусть* $\omega < (1 - \rho_n)^{-1}$. *Тогда*

$$\hat{\omega}_{\boldsymbol{\eta}} \geqslant \frac{\sigma_m}{\rho_n} \cdot \frac{1 - (1 - \rho_n)\omega}{\omega - (1 - \sigma_m)}.$$

Теорема 4. *Положим* $\hat{\omega} = \hat{\omega}_{\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\rho}}(\Theta)$ *и* $\omega_{\boldsymbol{\eta}} = \omega_{\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\rho}}(\Theta, \boldsymbol{\eta})$. *Пусть* $\hat{\omega} < (1 - \rho_n)^{-1}$. *Тогда*

$$\omega_{\boldsymbol{\eta}} \geqslant \begin{cases} \dfrac{1 - (1 - \rho_n)\hat{\omega}}{\rho_n} & \text{при } \hat{\omega} \geqslant \dfrac{1 - \sigma_m}{1 - \rho_n} \\ \dfrac{\sigma_m}{1 - (1 - \sigma_m)\hat{\omega}^{-1}} & \text{при } \hat{\omega} \leqslant \dfrac{1 - \sigma_m}{1 - \rho_n} \end{cases}.$$

Здесь мы имеем в виду, что $(1 - \rho_n)^{-1} = +\infty$ *при* $\rho_n = 1$.

В частности, в случаях $n = 1$ или $m = 1$, наиболее актуальных для теории диофантовых приближений, эти теоремы принимают следующий симметричный вид.

Теорема 5. *Пусть ω, $\hat{\omega}$, $\omega_{\boldsymbol{\eta}}$, $\hat{\omega}_{\boldsymbol{\eta}}$ — как в теоремах 3, 4.*

(i) *Пусть $n = 1$. Тогда*

$$\hat{\omega}_{\boldsymbol{\eta}} \geqslant \frac{\sigma_m}{\omega - (1-\sigma_m)}, \qquad \omega_{\boldsymbol{\eta}} \geqslant \frac{\sigma_m}{1-(1-\sigma_m)\hat{\omega}^{-1}}.$$

(ii) *Пусть $m = 1$ и $\omega < (1-\rho_n)^{-1}$. Тогда*

$$\hat{\omega}_{\boldsymbol{\eta}} \geqslant \frac{\omega^{-1} - (1-\rho_n)}{\rho_n}, \qquad \omega_{\boldsymbol{\eta}} \geqslant \frac{1-(1-\rho_n)\hat{\omega}}{\rho_n}.$$

Многопараметрическая геометрия чисел. Проделанная в этом году работа в области диофантовых приближений с весами позволила по-новому взглянуть на параметрическую геометрию чисел Шмидта–Суммерера.

Пусть Λ — произвольная решётка полного ранга в $\mathbb{R}^d$ с определителем 1. Рассмотрим пространство параметров

$$\mathcal{T} = \left\{ \boldsymbol{\tau} = (\tau_1, \ldots, \tau_d) \in \mathbb{R}^d \,\middle|\, \tau_1 + \ldots + \tau_d = 0 \right\}.$$

Для каждого $\boldsymbol{\tau} \in \mathcal{T}$ положим $\mathcal{B}_{\boldsymbol{\tau}} = \operatorname{diag}(e^{\tau_1}, \ldots, e^{\tau_d})\mathcal{B}$, где

$$\mathcal{B} = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \,\middle|\, |\mathbf{x}| \leqslant 1 \right\}.$$

Обозначим через $\lambda_k(\mathcal{B}_{\boldsymbol{\tau}}, \Lambda)$, $k = 1, \ldots, d$, последовательные минимумы параллелепипедов $\mathcal{B}_{\boldsymbol{\tau}}$ относительно решётки Λ и соответствующие им кусочно-линейные функции

$$L_k(\boldsymbol{\tau}) = L_k(\boldsymbol{\tau}, \Lambda) = \log\big(\lambda_k(\mathcal{B}_{\boldsymbol{\tau}}, \Lambda)\big), \qquad S_k(\boldsymbol{\tau}) = S_k(\boldsymbol{\tau}, \Lambda) = \sum_{1 \leqslant j \leqslant k} L_j(\boldsymbol{\tau}, \Lambda).$$

Многие задачи теории диофантовых приближений можно сформулировать как вопросы об асимптотическом поведении функций $L_k(\boldsymbol{\tau})$ и $S_k(\boldsymbol{\tau})$. Различные задачи требуют различных подмножеств пространства параметров $\mathcal{T}$, по которым предполагается стремление $\boldsymbol{\tau}$ к бесконечности.

В этом году нам удалось показать, что при подходящем выборе решётки Λ одномерные подпространства пространства $\mathcal{T}$ в точности соответствуют диофантовым приближениям с весами. Это позволило усилить теоремы 1 и 2, представив их в виде цепочек неравенств для аналогов экспонент Шмидта–Суммерера. В данный момент идёт работа над текстом соответствующей статьи. Отметим, что в прошлом году в качестве подмножества пространства $\mathcal{T}$ мы рассматривали само пространство $\mathcal{T}$, что позволило в таком же ключе усилить теорему переноса для диофантовых экспонент решёток.

Подготовленные в 2019 году работы

[1] O. N. German *Transference theorems in Diophantine approximation with weights*, принято в печать в Mathematika, DOI:10.1112/mtk.12022; arXiv:1905.01512

[2] Две главы в монографии D. Badziahin, O. German, M. Hussain, O. Karpenkov, S. Kristensen, J. Schleischitz, D. Simmons, B. Wang *Open problems, questions and conjectures in Diophantine approximation and dynamical systems*, готовится к печати

Доклады на конференциях в 2019 году

- “Baikal Number Theory” (Ольхон, Россия, 26-30 августа 2019), приглашённый доклад
- “Ergodic theory, Diophantine approximation and related topics” (Creswick, Австралия, 17-28 июня 2019), приглашённый доклад
- “Transcendence and Diophantine Problems” (Москва, Россия, 10-14 июня 2019), приглашённый доклад
- “Ломоносовские чтения – 2019” (Москва, Россия, 15-25 апреля 2019), устный доклад

Педагогическая деятельность

- Курс “Теория чисел”, мехмат МГУ, 4 курс, лекции и семинары
- Спецкурс “Геометрия диофантовых приближений”, мехмат МГУ, 1-6 курс
- Курс “Теоретико-числовые основы криптографии”, Бакинский филиал МГУ, 2 курс магистратуры, лекции и семинары
- Научное руководство двумя аспирантами (Ибрагим Тлюстангелов и Эльмир Бигушев) и пятью студентами (Максим Ильметов, Александр Банарь, Артемий Соколов, Глеб Домбровский, Александр Малахов)
- Мини-курс по теории чисел, Московские осенние сборы по математике, ОЦ «Команда»
- Мини-курс по теории чисел, Декабрьская математическая образовательная программа, ОЦ «Сириус»